

تعریف: به ازای هر مجموعه S از رئوس گراف G مجموعه تمام رئوس مجاور رئوس S را مجموعه همسایه S در G می نامیم و آن را با $N_G(S)$ نمایش می دهیم. به عبارتی دیگر:

$$N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$$

یادآوری (قضیه برژ): تطابق M در G یک تطابق ماکسیمم است $\Leftrightarrow$ گراف G شامل هیچ مسیر M -افزوده نباشد.

قضیه هال: اگر یک گراف دو بخشی با بخش های X, Y باشد، آنگاه گراف G دارای تطابقی است که همه رئوس X را بپوشاند $\Leftrightarrow$ شرط هال برقرار باشد ($\forall S \subseteq X; |N(S)| \geq |S|$).

برهان:

لزوم شرط) اگر M تطابق باشد که همه رئوس X را بپوشاند، آنگاه برای هر $S \subseteq X$ باید حداقل به اندازه تعداد اعضای S در Y همسایه وجود داشته باشد. به عبارتی دیگر:

$$\forall S \subseteq X; |N(S)| \geq |S|$$

کفایت شرط) برهان خلف

فرض کنید برای هر $S \subseteq X$ و $|N(S)| \geq |S|$ ولی G شامل تطابقی که همه رئوس X را بپوشاند، نباشد.

تطابق M را یک تطابق ماکسیمم در G در نظر میگیریم.

طبق فرض خلف M همه رئوس X را نمی پوشاند. در نتیجه راس $x_0 \in X$ وجود دارد که M -ناآلوده است.

مجموعه Z را مجموعه رئوسی در نظر میگیریم که با مسیرهای M -متناوب به x_0 در ارتباط اند و قرار می دهیم:

$$Z \cap X = S, Z \cap Y = T, Z = S \cup T$$

ادعا: M یک تطابق کامل از T به $S - x_0$ است و $T = N(S)$

رئوس در T با یال هایی که در M نیست و رئوس S با یال های M به x_0 متصل می شوند.

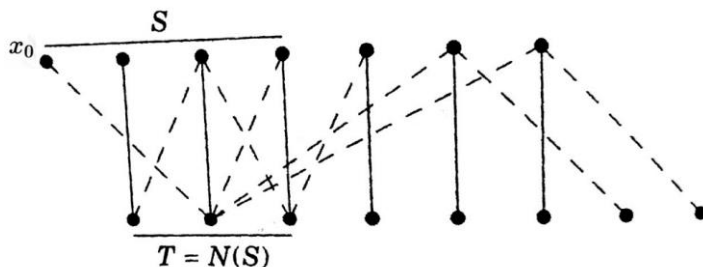
تطابق M ماکسیمم است $\Leftrightarrow$ مسیر M -افزوده وجود ندارد. $\Leftrightarrow$ هر راس در T ، M -آلوده است. پس $T \subseteq N(S)$

$\Leftrightarrow y \in N(S) \Leftrightarrow$ یک مسیر متناوب از x_0 به y وجود دارد. $\Leftrightarrow y \in T$ پس $T \supseteq N(S)$

در نتیجه:

$$|T| = |N(S)| = |S - x_0| = |S| - 1 < |S|$$

عبارت بالا با فرض قضیه در تناقض است. پس: تطابق ماکزیمم در گراف G وجود دارد که رئوس X را میپوشاند.



نتیجه قضیه هال: هر گراف دوبخشی k -منتظم ($k > 0$) دارای تطابق کامل است.

فرض کنید G یک گراف k -منتظم دوبخشی با بخش های X, Y باشد.

$$|E(G)| = k|X|, |E(G)| = k|Y| \Rightarrow |X| = |Y|$$

هر تطابق که رؤس X را آلوده کند $\Leftarrow$ همه رؤس Y را آلوده می کند. $\Leftarrow$ تطابق کامل است.

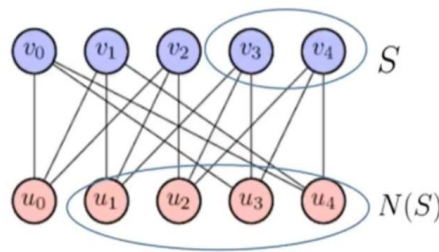
حال کافی است ثابت کنیم گراف G در شرط هال صدق می کند.

$$S \subseteq X \Rightarrow$$

$$|N(S)| = k|S| = \text{تعداد یال های خارج شده از } S \text{ به } N(S)$$

$$|N(S)| = k|N(S)| = \text{تعداد یال های خارج شده از } N(S)$$

چون تعداد یال های خارج شده از $N(S)$ نا کمتر از سال های خارج شده از S به $N(S)$ است، پس $|N(S)| \geq |S|$ و شرط هال برقرار است.



تعریف: یک زیرمجموعه از رؤس گراف G ($K \subseteq V(G)$) را پوشش راسی گوئیم هرگاه هر یال در G دارای حداقل یک انتها در K باشد.

تعریف: پوشش K را پوشش مینیمم گوئیم اگر هیچ پوشش K' در G با شرط $|K'| < |K|$ وجود نداشته باشد.

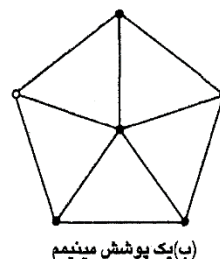
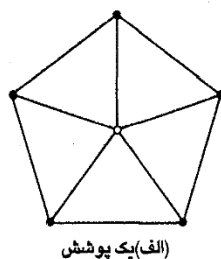
اگر K یک پوشش و M یک تطابق از G باشد، در این صورت K شامل حداقل یک سر از هر یال M است. بنابراین به ازای هر تطابق M و هر پوشش K داریم: $|M| \leq |K|$ براحتی میتوان نتیجه گرفت که اگر M^* یک تطابق ماکسیمم و K^* یک پوشش مینیمم باشد، آنگاه:

$$|M^*| \leq |K^*|$$

لم: اگر K یک پوشش و M یک تطابق از G باشد، به طوری که $|M| = |K|$ در این صورت M یک تطابق ماکسیمم و K یک پوشش مینیمم است.

$$|M| \leq |M^*| \leq |K^*| \leq |K|$$

پس $|M| = |M^*|, |K| = |K^*|$.



قضیه کونینگ-اگروری: در گراف دوبخشی تعداد یال ها در یک تطابق ماکسیمم برابر تعداد رئوس در یک پوشش مینیمم است.

برهان:

فرض کنید G یک گراف دوبخشی با دو بخش X, Y و همچنین M^* یک تطابق ماکسیمم از G باشد.

مجموعه رئوس M^* -ناآلوده در X را با U و مجموعه تمام رئوسی است که به وسیله مسیرهای M^* -متناوب به رئوس U متصل اند را با Z نمایش می دهیم و قرار می دهیم:

$$T = Z \cap Y, S = Z \cap X$$

هر راس T ، M^* -آلوده است و $N(S) = T$.

حال $K^* = (X - S) \cup T$ تعریف می کنیم. حداقل یک سر هر یال G باید در K^* باشد، زیرا در غیر این صورت یک یال وجود دارد که یک سر آن در S و سر دیگر آن در $Y - T$ باشد و این با شرط $N(S) = T$ در تناقض است. پس K^* یک پوشش از G است و $M^* = K^*$ ، پس بنا به لم قبل K^* یک پوشش مینیمم است.

